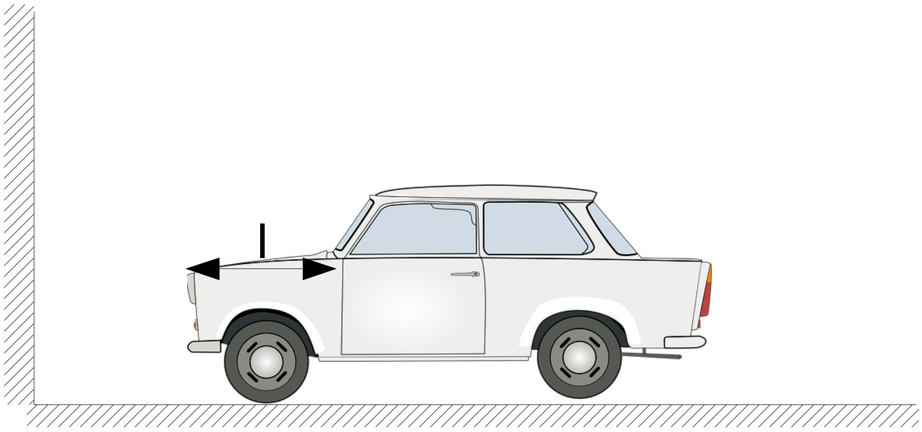
Webinar: Dynamik
Thema: Gradlinige Bewegung

Aufgabe 1)



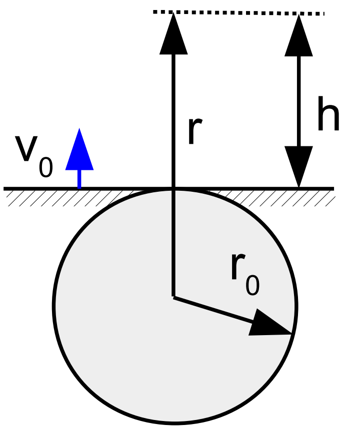
Bei einem Crash-Test fährt ein Versuchsfahrzeug mit einer Geschwindigkeit v_0 gegen eine Wand. Während des Knautschvorgangs wird eine Beschleunigung von $a_0 = -a_0\ (e^{t/T} - 1)$ gemessen. Dabei sei l die Länge der Knautschzone, welche komplett zusammengedrückt wird.

a) Bestimme den Knautschvorgang t = T, wenn die Geschwindigkeit unmittelbar vor Ende des Kanutschens Null ist.

b) Wie groß ist die Länge l der Knautschzone?

Gegeben: v_0, a_0

Aufgabe 2)



Mit welcher Anfangsgeschwindigkeit muss ein Körper senkrecht nach oben geworfen werden, damit einer eine Höhe h über dem Erdboden erreicht? (Vernachlässige den Luftwiderstand). Der Verlauf der Fallbeschleunigung ist gegeben zu:

$$g = g_0 \frac{r_0^2}{r^2}, \quad r > r_0$$

Dabei ist r_0 der Erdradius und g_0 die Fallbeschleunigung auf der Erdoberfläche

Gegeben: r_0, h, g_0

Lösung der Aufgabe 1)

a) Bestimme den Knautschvorgang t = T, wenn die Geschwindigkeit unmittelbar vor Ende des Kanutschens Null ist.

Gegeben ist v_0 und $a_0 = -a_0\ (e^{t/T} - 1)$

Es handelt sich um eine gradlinige Bewegung. Die Beschleunigung ist in Abhängigkeit von t gegeben. Es gilt der folgende Zusammenhang zwischen Beschleunigung und Geschwindigkeit:

$\frac{dv}{dt} = a$ Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit t ergibt die Beschleunigung

Einsetzen der Beschleunigung:

$$\frac{dv}{dt} = -a_0 \left(e^{\frac{t}{T}} - 1\right)$$

Trennung der Veränderlichen:

$$dv = -a_0 \left(e^{\frac{t}{T}} - 1\right)\ dt$$

Vereinfachung der rechten Seite:

$$dv = \left(-a_0 e^{\frac{t}{T}} + a_0\right)\ dt$$

Integration:

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t \left(-a_0 e^{\frac{t}{T}} + a_0\right)\ dt$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = -a_0 \int_0^t e^{\frac{t}{T}} dt + a_0 \int_0^t dt$$

Wir integrieren zunächst den Term:

$$-a_0 \int_0^t e^{\frac{t}{T}} dt$$

Mittels Substiution ergibt sich:

$$u = \frac{t}{T}$$

Ableitung von u nach t:

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{T}$$

Auflösen nach dt:

$$dt = T\ du$$

Einsetzen von u und dt in die obige Gleichung:

$$-a_0 \cdot \int_0^t e^u T\ du$$

$$-a_0\ T \cdot \int_0^t e^u\ du$$

Integration der Exponentialfunktion ergibt wieder die Exponentialfunktion:

$$-a_0\ T \cdot [e^u]_0^t$$

Rücksubstitution von u = t/T:

$$-a_0\ T \cdot [e^{\frac{t}{T}}]_0^t$$

Einsetzen der Grenzen:

$$-a_0\ T \cdot [e^{\frac{t}{T}} - e^{\frac{0}{T}}]$$

$$-a_0\ T \cdot [e^{\frac{t}{T}} - e^0] = -a_0 \cdot T \cdot e^{\frac{t}{T}} + a_0 \cdot T$$

In die gesamte Gleichung einsetzen:

$$\int_{v_0}^{v} dv = -a_0 \int_0^t e^{\frac{t}{T}} dt\ +\ a_0 \int_0^t dt$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = -a_0 \cdot T \cdot e^{\frac{t}{T}} + a_0 T\ +\ a_0 \int_0^t dt$$

Den Rest integrieren:

$$\boxed{v - v_0 = -a_0 \cdot T \cdot e^{\frac{t}{T}} + a_0 \cdot T + a_0 \cdot t}$$ 1. allgemeine Ableitung

Laut Aufgabenstellung betrachten wir den Knautschvorgang. Dieser beginnt bei t = 0 und endet bei t = T. Am Ende des Knautschvorgangs (bei t = T) soll die Geschwindigkeit v = 0 sein. Wir setzen nun also für t = T und für v = 0 ein:

$$-v_0 = -a_0 \cdot T \cdot e^{\frac{T}{T}} + a_0 \cdot T + a_0 \cdot T$$

$$-v_0 = -a_0 \cdot T \cdot e^1 + 2a_0 \cdot T$$

Es soll nun die Dauer des Knautschvorgangs ermittelt werden. Es wird also nach T aufgelöst:

$$v_0 = a_0 \cdot T \cdot e^1 - 2a_0 \cdot T$$ Mal Minus 1

$$v_0 = T\left(a_0 \cdot e^1 - 2a_0\right)$$

$$T = \frac{v_0}{a_0 \cdot e^1 - 2a_0}$$

$$T = \frac{v_0}{a_0} \frac{1}{\left(e^1 - 2\right)}$$

b) Wie groß ist die Länge l der Knautschzone?

Die Länge l der Kanutschzone ist der Weg vom Beginn bis zum Ende des Knautschvorgangs.

Der Zusammenhang ergibt sich wie folgt:

$$\frac{dl}{dt} = v$$ Ableitung des Weges nach der Zeit ergibt die Geschwindigkeit

Trennung der Veränderlichen:

$$dl = v\ dt$$

Die erste Ableitung haben wir bereits oben bestimmt. Diese ergab:

$$\boxed{v - v_0 = -a_0 \cdot T \cdot e^{\frac{t}{T}} + a_0 \cdot T + a_0 \cdot t}$$

Auflösen nach v:

$$v = -a_0 \cdot T \cdot e^{\frac{t}{T}} + a_0 \cdot T + + a_0 \cdot t + v_0$$

Einsetzen:

$$dl = \left(-a_0 \cdot T \cdot e^{\frac{t}{T}} + a_0 \cdot T + a_0 \cdot t + v_0\right) dt$$

Integration:

$$\int_0^l dl = \int_0^t \left(-a_0 \cdot T \cdot e^{\frac{t}{T}} + a_0 \cdot T + a_0 \cdot t + v_0\right) dt$$

$$l = -\int_0^t a_0 \cdot T \cdot e^{\frac{t}{T}}\ dt + \int_0^t a_0 \cdot T\ dt + \int_0^t a_0 \cdot t + \int_0^t v_0\ dt$$

Das erste Integral mittels Substiution ergibt:

$$u = \frac{t}{T} \qquad \frac{du}{dt} = \frac{1}{T} \qquad dt = T\,du$$

Einsetzen:

$$-\int_0^t a_0 \cdot T^2 \cdot e^u\ du$$

Integrieren:

$$-[a_0 \cdot T^2 \cdot e^u]_0^t$$

Rücksubstitution:

$$-[a_0 \cdot T^2 \cdot e^{\frac{t}{T}}]_0^t$$

Grenzen einsetzen:

$$-[a_0 \cdot T^2 \cdot e^{\frac{t}{T}} - a_0 \cdot T^2 \cdot e^0]$$

$$-[a_0 \cdot T^2 \cdot e^{\frac{t}{T}} - a_0 \cdot T^2]$$

Einsetzen in die obige Gleichung:

$$l = -a_0 \cdot T^2 \cdot e^{\frac{t}{T}} + a_0 T^2 + \int_0^t a_0 \cdot T\ dt + \int_0^t a_0 \cdot t + \int_0^t v_0\ dt$$

Rest Integrieren:

$$\boxed{l = -a_0 \cdot T^2 \cdot e^{\frac{t}{T}} + a_0 T^2 + a_0 \cdot T \cdot t + \frac{1}{2} a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t}$$ 2. allgemeine Ableitung

Es gilt auch hier wieder t = T:

$$l = -a_0 \cdot T^2 \cdot e + a_0 T^2 + a_0 \cdot T^2 + \frac{1}{2} a_0 \cdot T^2 + v_0 \cdot T$$

Zusammenfassen:

$$l = -a_0 \cdot T^2 \cdot e + \frac{5}{2} a_0 T^2 + v_0 \cdot T$$

Die Knautschdauer haben wir bereits in Aufgabenteil a) bestimmt und können diese nun hier einsetzen:

$$l = -a_0 \cdot \frac{e}{(e-2)^2} \frac{v_0^2}{a_0^2} + \frac{5}{2} a_0 \cdot \frac{1}{(e-2)^2} \frac{v_0^2}{a_0^2} + v_0 \cdot \frac{1}{(e-2)} \frac{v_0}{a_0}$$

Kürzen:

$$l = -\frac{e}{(e-2)^2} \frac{v_0^2}{a_0} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{(e-2)^2} \frac{v_0^2}{a_0} + \frac{1}{(e-2)} \frac{v_0^2}{a_0}$$

Auf einen Nenner bringen:

Wir wollen nun den Ausdruck vereinfachen, indem wir alles auf einen Nenner bringen. Hierzu wählen wir zunächst den Nenner $(e-2)^2$ aus. Dies erreichen wird durch Erweiterung. Der letzte Term muss also mit

$$\frac{(e-2)}{(e-2)}$$

erweitert werden:

$$l = -\frac{e}{(e-2)^2} \frac{v_0^2}{a_0} + \frac{5}{2(e-2)^2} \frac{v_0^2}{a_0} + \frac{1 \cdot (e-2)}{(e-2)(e-2)} \frac{v_0^2}{a_0}$$

$$l = -\frac{e}{(e-2)^2} \frac{v_0^2}{a_0} + \frac{5}{2(e-2)^2} \frac{v_0^2}{a_0} + \frac{e-2}{(e-2)^2} \frac{v_0^2}{a_0}$$

Der zweite Term hat eine zusätzliche 2 im Nenner. Wir werden nun die anderen beiden Terme auf diesen Nenner bringen. Auch dies wieder mittels Erweiterung:

$$\frac{2}{2}$$

Es ergibt sich:

$$1 = -\frac{2e}{2(e-2)^2}\frac{v_0^2}{a_0} + \frac{5}{2(e-2)^2}\frac{v_0^2}{a_0} + \frac{2e-4}{(e-2)^2}\frac{v_0^2}{a_0}$$

Zusammenfassen des Zählers:

$$\text{Zähler} = -2e + 5 + 2e - 4 = 1$$

Es ergibt sich als Lösung:

$$1 = \frac{1}{2(e-2)^2}\frac{v_0^2}{a_0}$$

Lösung der Aufgabe 2)

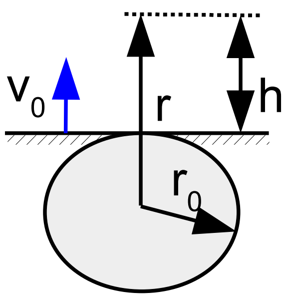
Der Verlauf der Fallbeschleunigung ist gegeben zu

$$g = g_0 \frac{r_0^2}{r^2}, \quad r > r_0$$

In der Aufgabenstellung wird r_0 , g_0 und h als gegeben angenommen.Gesucht ist v_0.
In der obigen Gleichung ist aber noch der Radius r gegeben, welcher unbekannt ist. Da auch g unbekannt ist, können wir r nicht aus der obigen Gleichung ermitteln.

Besteht die Möglichkeit r durch bereits bekannte Variablen auszudrücken?

Dazu betrachten wir die Grafik:



Es ist also der Verlauf der Fallbeschleunigung gegeben. Wir führen die x-Achse (gradlinige Bewegung) von unten nach oben ein. Es ist möglich den Radius r durch bekannte Variablen auszudrücken:

$r = r_0 + x$

Einsetzen in die obige Formel ergibt:

$$g = g_0 \frac{r_0^2}{(r_0 + x)^2}$$

Das bedeutet, dass die Beschleunigung in Abhängigkeit vom Weg gegeben ist. Es gilt der folgende Zusammenhang zwischen Beschleunigung und Geschwindigkeit:

$$\frac{dv}{dt} = a$$

Hier ist die Beschleunigung aber nicht in Abhängigkeit von der Zeit t gegeben. Wir erweitern also mit:

$$\frac{dx}{dx}$$

um eine Abhängigkeit vom Weg zu erhalten:

$$a = \frac{dv}{dt} \frac{dx}{dx}$$

Wir schreiben um:

$$a = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt}$$

Und sehen und, dass die Ableitung des Weges x nach der Zeit t die Geschwindigkeit ergibt:

$$\frac{dx}{dt} = v$$

Einsetzen:

$$a = \frac{dv}{dx} v$$

Trennung der Veränderlichen:

$$a\,dx = v\,dv$$

Es muss nun die Fallbeschleunigung für a eingesetzt werden. Die Fallbeschleunigung wirkt aber entegen der positiven x-Achse, muss also negativ berücksichtigt werden:

$$a = -g$$

Einsetzen:

$$-g_0 \frac{r_0^2}{(r_0+x)^2}\,dx = v\,dv$$

Integration:

Die Grenzen werden für x_0 (Startpunkt) bis x (Endpunkt) betrachtet. Für die Geschwindigkeit wird v_0 (gesuchte Anfangsgeschwindigkeit) und v (Endgeschwindigkeit) eingesetzt:

$$-g_0 r_0^2 \cdot \int_{x_0}^{x} \frac{1}{(r_0+x)^2}\,dx = \int_{v_0}^{v} v\,dv$$

Wir betrachten zunächst das Integral auf der linken Seite:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{(r_0+x)^2}\,dx$$

Wir substituieren:

$$u = r_0 + x \qquad \frac{du}{dx} = 1 \qquad dx = 1\,du$$

Einsetzen:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{u^2}\,du$$

Wir schreiben um:

$$\int_{x_0}^{x} u^{-2}\,du$$

Wir integrieren (Potenzregel):

Potenzregel: $\int x^n = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$

$$\int_{x_0}^{x} u^{-2} du = \frac{1}{-2+1} u^{-2+1} = -u^{-1} = -[\frac{1}{u}]_{x_0}^{x}$$

Wir führen die Rücksubstitution durch $u = (r_0 + x)$:

$$-[\frac{1}{r_0 + x}]_{x_0}^{x}$$

Grenzen einsetzen:

$$-\frac{1}{r_0 + x} + \frac{1}{r_0 + x_0}$$

Einsetzen in die gesamte Gleichung:

$$-g_0 r_0^2 \cdot \int_{x_0}^{x} \frac{1}{(r_0 + x)^2} dx = \int_{v_0}^{v} v\, dv$$

$$-g_0 r_0^2 \cdot (-\frac{1}{r_0 + x} + \frac{1}{r_0 + x_0}) = \int_{v_0}^{v} v\, dv$$

Die rechte Seite integrieren:

$$-g_0 r_0^2 \cdot (-\frac{1}{r_0 + x} + \frac{1}{r_0 + x_0}) = [\frac{1}{2} v^2]_{v_0}^{v}$$

Grenzen einsetzen:

$$-g_0 r_0^2 \cdot (-\frac{1}{r_0 + x} + \frac{1}{r_0 + x_0}) = \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2$$

Die allgemeine Integration ist bestimmt. Wir wissen, dass der Weg bei $x_0 = 0$ beginnt. Außerdem ist bei $x = h$ der höchste Punkt des Körpers erreicht. An diesem Punkt ist die Geschwindigkeit $v = 0$ (der Körper verharrt kurz und fällt dann wieder Richtung Erdboden). Einsetzen dieser Werte ergibt:

$$-g_0 r_0^2 \cdot \left(-\frac{1}{r_0+h}+\frac{1}{r_0+0}\right)=\frac{1}{2}0^2-\frac{1}{2}v_0^2$$

$$-g_0 r_0^2 \cdot \left(-\frac{1}{r_0+h}+\frac{1}{r_0}\right)=-\frac{1}{2}v_0^2$$

Auflösen der Klammer:

$$\frac{g_0 r_0^2}{r_0+h}-\frac{g_0 r_0^2}{r_0}=-\frac{1}{2}v_0^2$$

$$\frac{g_0 r_0^2}{r_0+h}-g_0 r_0=-\frac{1}{2}v_0^2$$

Auflösen nach v_0:

$$-\frac{2g_0 r_0^2}{r_0+h}+2g_0 r_0=v_0^2$$

Auf einen Nenner bringen durch Erweiterung:

$$-\frac{2g_0 r_0^2}{r_0+h}+2g_0 r_0\frac{(r_0+h)}{(r_0+h)}=v_0^2$$

$$-\frac{2g_0 r_0^2}{r_0+h}+\frac{2g_0 r_0^2}{(r_0+h)}+\frac{2g_0 r_0 h}{(r_0+h)}=v_0^2$$

Ersten beiden Terme kürzen sich raus:

$$\frac{2g_0 r_0 h}{(r_0+h)}=v_0^2$$

Wurzel ziehen:

$$v_0=\sqrt{\frac{2g_0 r_0 h}{(r_0+h)}}$$